Provando que o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence classe NP-Completo

Cristiano C. Matte, Jonas C. Meinerz

# Resumo

O problema do ciclo hamiltoniano Ø estudado há mais de uma centena de anos e, por ser um problema da classe NP-Completo, tem uma importância teórica muito grande para a ciência da computação. Este trabalho tem como objetivo apresentar a prova de que o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados (chamaremos como "problema do ciclo hamiltoniano") é, de fato, um problema da classe NP-Completo.

# Introdução

Segundo (*Cormen*) dizer que um problema pertence classe NP-Completo significa dizer que este problema é tão difícil quanto qualquer problema em NP, sendo NP a classe dos problemas verificáveis em tempo polinomial.

O problema abordado portanto, segue da seguinte maneira: Seja *G* um grafo orientado tal que *G* = (*V,E*), dizemos que *G* é um grafo hamiltoniano se e somente se *G* possui um ciclo hamiltoniano. Por sua vez, um ciclo hamiltoniano consiste em um ciclo simples (i. e., um ciclo que visita no máximo uma vez cada vértice em *V*) de um grafo orientado onde tal ciclo contém todos os vértices em *V* (i.e., a diferença entre *V* e *V*2, sendo *V*2 o conjunto de vértices presentes no ciclo, resultaria em um conjunto vazio).

Para mostrar que o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados é um problema pertencente classe NPCompleto, devemos apresentar a prova de que existe um algoritmo de verificação em tempo polinomial para este problema, mostrando que o mesmo pertence classe NP, e então, que existe um algoritmo que execute em tempo polinomial e faça a redução de um problema NP-Completo ao problema do ciclo hamiltoniano, o que mostraria que o problema do ciclo hamiltoniano está inserido na classe de problemas NP-Difícil. Se de fato demonstrarmos que o problema em questão pertence NP e NP-Difícil, então estaremos demonstrando que o mesmo pertence classe NP-Completo.

# Verificação em tempo polinomial

Precisamos verificar se há ou não um ciclo hamiltoniano em um grafo, ou seja, um algoritmo que diga "sim" caso haja tal ciclo ou "não" caso contrário. Teremos portanto um problema de aceitação ou rejeição de uma linguagem formal, portanto seja CICHAM uma linguagem formal tal que:

CIC-HAM = {*< G >, G* é um ciclo hamiltoniano}

Se existir permutação de todos os elementos pertencentes a *V* e se cada uma das arestas do ciclo realmente existe em *E* e de fato compõe um ciclo. Isso é descrito como um “certificado”.

# Algoritmo de Verificação

Os argumentos de entrada do algoritmo que usaremos para fazer a verificação são duas cadeias. Seja *x* uma cadeia binária obtida a partir da codificação de *G* e *y* o certificado descrito, um algoritmo *A* verifica a existência de um certificado *y* na cadeia *x*, tal que *A*(*x,y*) = 1. A linguagem certificada é definida a seguir:

CERT = {*x* ∈ {0*,*1}\* : ∃*y* ∈ {0*,*1}\*|*A*(*x,y*) = 1}

Informalmente, a linguagem *CERT* é aceita se para *x* existe um certificado (*y*) válido.

Como *k* é uma constante tão grande quanto se queira, podemos definir a linguagem aceita com base na linguagem certificada:

ACEITA = {*x* ∈ {0*,*1}\* : ∃*y* | |*y*| = *O*(|*x*|*k*)}

Agora iremos propor um algoritmo verifica a linguagem ACEITA descrita.

**Entrada:** G = (V,E) um grafo não orientado, Y = certificado.

**Saída:** 1 se a linguagem for "*ACEITA*", 0 caso contrário.

**for** i = 0 até n - 1 do

**if** ∃ Y[i] ∈ V **and** ∃ (Y[i], Y[i+1]) ∈ E **then**

V := V - {Y[i]};

E := E - { (Y[i], Y[i+1]) } ;

**else**

return;

**end for;**

**if** ∃ Y[n] ∈ V **and** ∃ (Y[n], Y[1]) ∈ E **then**

return 1;

**else**

return 0;

TEOREMA: O problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence classe NP.

Demonstração. Conforme o algoritmo acima, concluísse que é da ordem de *O*(*n*2).. A verificação de cada *if* custa 2*n* e o algoritmo executa *O*(*n*). Por meio desta análise, é trivial perceber que a complexidade do algoritmo de verificação é da ordem de *O*(*n*2), sendo assim da classe P ao qual está completamente inserida na classe NP. Sendo assim, podemos dizer que este algoritmo de verificação em tempo polinomial é a prova de que o problema pertencente classe NP.

# Redução a um problema NP-Completo

Um problema NPCompleto é um problema que pertence as classes NP e NP-Difícil. Podemos de defini-lo formalmente como: {*Q* ∈ NP-Completo ←→ *Q* ∈ (NP ∩ NP-Difícil)}

Para mostrar que ele também pertence classe NP-Completo precisamos mostrar que ele é tão difícil quanto qualquer problema em NP. Assim usaremos um problema já conhecido da classe NPC e aplicaremos uma "redução" de um problema (NP-Completo) para o problema do ciclo hamiltoniano. Se de fato um problema NPC pode ser reduzido ao problema do ciclo, isso significa que o problema do ciclo hamiltoniano seria um problema NPDifícil (*R.Garey,S.Johnson*), o que também significa que ele seria um problema NP-Completo, pois já mostramos que este problema têm um algoritmo de verificação em tempo polinomial.

Para reduzir um problema NP-Completo ao problema do ciclo hamiltoniano, precisamos de algum tipo de comparação. Um bom modo de comparação é traduzir ambos os problemas a duas linguagens formais, digamos CIC-HAM a linguagem que representa o problema do ciclo hamiltoniano e L a linguagem que representa o problema NP-Completo que será reduzido CIC-HAM.

Pode-se reduzir uma linguagem L a CICHAM desde que as instâncias de L sejam reformuláveis como instancias de CIC-HAM e cada uma dessas instancias de CIC-HAM forneçam soluções para as respectivas instancias de L. Além disso, a volta também deve valer.

Refor ando o conceito de redu ıes, vale lembrar que se podemos reduzir L a CICHAM, entªo L nªo Ø mais dif cil (ou mais complexo) do que CIC-HAM. De nindo o problema formalmente:

*L* ≤CIC-HAM ←→ (*f* : {0*,*1}\*−→ {0*,*1}\*

| ∀*x* ∈ *L* → *f*(*x*) ∈ CIC-HAM)

Para prosseguir com esta prova, Ø mandat rio que escolhamos uma linguagem L que saibamos reduzir em tempo polinomial, apresentando o seu algoritmo de redu ªo. A linguagem que utilizaremos para realizar a prova Ø a linguagem que veri ca o problema de cobertura dos vØrtices de um grafo. Neste texto, chamaremos tal linguagem de "COB-VER". Assumiremos que COB-VER Ø NP-Completo e isso nªo serÆ demonstrado (esta prova jÆ foi demonstrada e COB-VER Ø de fato pertencente classe NP-Completo).

O problema de cobertura dos vØrtices consiste em encontrar um inteiro positivo *k* tal que *k* corresponda ao nœmero m nimo de vØrtices sobre os quais todas as arestas do grafo sejam incidentes. O seu problema de decisªo equivale a responder pergunta "existe no grafo uma cobertura de vØrtices formada por *k* vØrtices?".

# Algoritmo de redu ªo

TEOREMA: O problema do ciclo hamiltoniano em grafos nªo orientados pertence classe NP-Dif cil.

Demonstra ªo. Para realizar a redu ªo, descrita na sessªo anterior, em uma inst ncia do problema do ciclo hamiltoniano que recebe um grafo *G* = (*V,E*), sendo este nªo orientado, e um inteiro *k*, constru mos outro grafo nªo orientado *G*0 = (*V* 0*,E*0) que tem um ciclo hamiltoniano se e somente se *G* tem uma cobertura de vØrtices de tamanho *k*.

A constru ªo de *G*0 Ø baseada em um dispositivo, que consiste em um fragmento de um grafo que impıe certas propriedades. A gura a seguir representa o dispositivo utilizado para a redu ªo do problema de cobertura dos vØrtices ao problema do ciclo hamiltoniano. Uma aresta (*u,v*) do grafo *G* corresponde ao dispositivo *Wuv* do grafo *G*0. Os caminhos sombreados sªo os œnicos poss veis pelo dispositivo que incluem todos os vØrtices, supondo que as œnicas conexıes do dispositivo ao restante de *G*0 sªo realizadas pelos vØrtices [*u,v,*1]*,*[*u,v,*6]*,*[*v,u,*1]*,*[*v,u,*6].

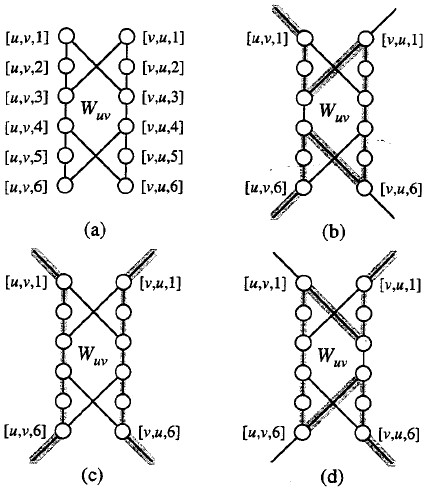


Figura 1: (*Introduction to Algorithms,*

*CORMEN*)

Sumarizando, impomos ao dispositivo as caracter sticas que necesitamos para que o mesmo possua um ciclo hamiltoniano, sendo suas œnicas entradas por

[*u,v,*1]*,*[*u,v,*6]*,*[*v,u,*1]*,*[*v,u,*6], e qualquer ciclo hamiltoniano de *G* deve obrigat riamente passar pelas arestas de *Wuv* em alguma das 3 maneiras indicadas pelos caminhos sombreados na gura acima, jÆ que os nodos do dispositivo sªo tambØm nodos de *G* e pela de ni ªo de ciclo hamiltoniano, todos os nodos no grafo devem ser visitados exatamente uma vez. AlØm dos vØrtices no dispositivo, *G*0 contØm *k* "vØrtices seletores"(onde para cada um dos vØrtices seletores, haverªo *k* dispositivos, sendo eles a representa ªo da cobertura dos vØrtices, jÆ que, como dito anteriormente, uma aresta

(*u,v*) ∈ *E* corresponde ao dispositivo *Wuv*). Sªo usadas arestas incidentes em vØrtices seletores para selecionar os *k* vØrtices da cobertura em *G*.

Por sua vez, o conjunto *E*0 de arestas Ø composto pelas arestas nos dispositivos e por dois outros tipos de arestas. Para cada vØrtice *u* ∈ *V* adicionamos arestas que unem pares de dispositivos (este Ø o primeiro tipo de arestas que serªo adicionadas a *E*0), formando um caminho entre todos eles. Ordena-se os vØrtices arbitrariamente de acordo com os seus respectivos graus (nœmero de vØrtices adjacentes). Cria-se um caminho em *G*0 que passa por todos os dispositivos que correspondem a arestas incidentes em *u* adicionando a *E*0 as arestas {([*u,u*(*i*)*,*6]*,*[*u,u*(*i*+1)*,*6]) : 1 ≤ *i* ≤ *grau*(*u*) − 1} (arestas que unem cada vØrtice selecionado ao vØrtice seguinte na ordena ªo, ou seja, o vØrtice de grau imediatamente maior que o seu). Isso faz com que para cada aresta *u* ∈ *V* , as arestas em *G*0 completem um caminho que contØm todos os dispositivos correspondentes s arestas incidentes sobre *u* em *G*.

Devido con gura ªo utilizada na constru ªo do dispositivo, se escolheremos um vØrtice *u* ∈ *V* na cobertura de vØrtices de *G*, pode-se tra ar um caminho de [*u,u*(1)*,*1] atØ[*u,u*(*grau*(*u*))*,*6] em *G*0 que cobre todos os dispositivos correspondentes s arestas incidentes em *u*, ou seja, para cada dispositivo *Wuu*(*i*) o caminho inclui 12 vØrtices (todos os vØrtices de um dispositivo) caso *u* esteja na cobertura de vØrtices e *u*(*i*) nªo esteja ou entªo inclui 6 vØrtices ([*u,u*(*i*)*,*1]*...*[*u,u*(*i*)*,*6]) caso ambos estejam na cobertura.

O œltimo tipo de arestas em *E*0 une o primeiro vØrtice, ou seja, o vØrtice de grau um

[*u,u*(1)*,*1] e o œltimo vØrtice (cujo grau Ø o maior encontrado no grafo) 

de cada um dos caminhos a cada um dos *k* vØrtices seletores. Formalmente, isso signica incluir as arestas (*u,v*) tal que:

{(*sj,*[*u,u*(1)*,*1]) : *u* ∈ *V* ∧ 1 ≤ *j* ≤ *k*} ∪



Ou seja, para cada vØrtice seletor, criamos uma liga ªo entre ele e o primeiro vØrtice do primeiro dispositivo e outra liga ªo (subentende-se por uma aresta), entre ele e o œltimo vØrtice do œltimo dispositivo.

*V* 0 Ø composto pelos dispositivos e pelos vØrtices seletores. Cada dispositivo contØm 12 vØrtices e existem *k* ≤ |*V* | vØrtices seletores, portanto |*V* 0| = 12|*E*| + *k*, ou seja, |*V* 0| ≤ 12|*E*|+|*V* |. JÆ as arestas de *G*0 sªo as arestas dos dispositivos e aquelas que ligam os vØrtices seletores aos dispositivos. Cada dispositivo possui 14 arestas, ou seja, 14|*E*| arestas em todos dispositivos. Para cada *u* ∈ *V* existem *grau*(*u*) − 1 arestas entre dispositivos. Iterando sobre todos os vØrtices de *V* e somando seus graus (nœmero de liga ıes com outros vØrtices, i.e., arestas), veri camos o nœmero de arestas entre dispositivos. A f rmula a seguir traduz este racioc nio:

∀*u*∈*V*

X

(*grau*(*u*) − 1) = 2|*E*| − |*V* |

*i*=*u*∈*V*

Chegamos ao nœmero total de arestas em *G*0 se adicionarmos ao resultado acima as arestas dos pares formados por um vØrtice seletor e um vØrtice de *V* . Temos *k* vØrtices seletores, logo temos 2*k*|*V* | arestas deste tipo. A equa ªo abaixo ilustra o nœmero total de arestas em *G*0:

|*E*0| = (14|*E*|) + (2|*E*| − |*V* |) + (2*k*|*V* |)

= 16|*E*| + (2*k* − 1)|*V* |

≤ 16|*E*| + (2|*V* | − 1)|*V* |*.*

Visto que |*V* 0| ≤ 12|*E*| + |*V* | e |*E*0| ≤ 16|*E*| + (2|*V* | − 1)|*V* |, o tamanho de *G*0 Ø polinomial no tamanho de *G*, portanto podemos construir *G*0 em tempo polinomial.

Visto que tal opera ªo Ø fact vel em tempo polinomial, se ela realmente representar uma redu ªo de *G* em *G*0, ou seja, se pudermos a rmar que *G* tem uma cobertura de vØrtices de tamanho *k* se e somente se *G*0 tem um ciclo hamiltoniano, entªo o problema do ciclo hamiltoniano Ø um problema NP-Dif cil.

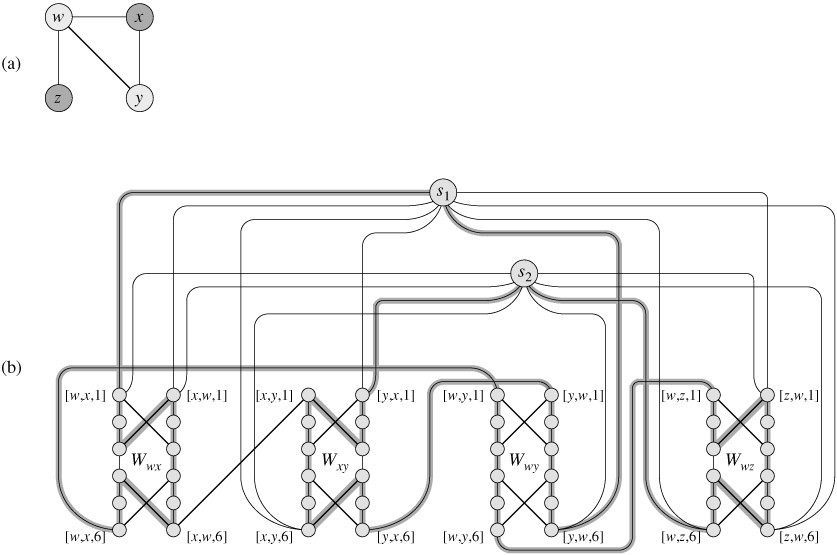


Figura 2: (*Introduction to Algorithms, CORMEN*) A gura b) represanta a redu ªo da inst ncia a) do problema de cobertura dos vØrtices ao problema do ciclo hamiltoniano.

Pode-se observar na gura acima que o mØtodo apresentado neste artigo inclui ciclos hamiltonianos em *G*0 se e somente se existe uma cobertura com *k* vØrtices. No caso da imagem, temos *k* = 2. Como foi dito anteriormente, os dispositivos representam as conexıes dos vØrtices seletores com outros vØrtices. Nessa gura, vemos que *Wwx* refere-se liga ªo entre o vØrtice *w* e o vØrtice *x* no grafo *a*). Os outros dispositivos sªo anÆlogos.

Suponha que *G* = (*V,E*) possui uma cobertura de vØrtices *V* \* ⊆ *V* de tamanho *k*. Seja *V* \* = {*u*1*,...,uk*}. Para cada *ui* ∈ *V* \* foram inclu das arestas que conectam todos os dispositivos que correspondem aos seus vØrtices incidentes e tambØm aquelas arestas contidas no interior dos dispositivos, dependendo da cobertura ser de um vØrtice (como acontece na maioria dos dispositivos da gura de exemplo) ou dois vØrtices (dispositivo *Wwy* no exemplo). A gura 2 mostra como os caminhos sombreados formam um ciclo hamiltoniano devido con guraªo de vØrtices e arestas que impostas no momento da constru ªo de *G*0. Com isso, mostramos que *G*0 tem um ciclo hamiltoniano se *G* possui uma cobertura de vØrtices de tamanho *k*. O œltimo passo para mostrar que a redu ªo Ø valida e portanto o problema do ciclo hamiltoniano Ø de fato um problema NP-Dif cil serÆ mostrar que se *G*0 tem um ciclo hamiltoniano, entªo *G* tem uma cobertura de *k* vØrtices, o que implicaria que *G* tem uma cobertura de *k* vØrtices se e somente se *G*0 tem um ciclo hamiltoniano.

Suponha que *G*0 = (*V* 0*,E*0) tenha um ciclo hamiltoniano *C* ⊆ *E*0. Pode-se a rmar que:

*V* \* = {*u* ∈ *V* : (*sj,*[*u,u*(1)*,*1] ∈ *C* para algum *j* | 1 ≤ *j* ≤ *k*}

Ø uma cobertura de vØrtices para *G*. Particionando *C* em caminhos mÆximos comeados em algum vØrtice seletor, que percorram uma aresta entre este e um dispositivo relacionado a um seletor de grau 1 e terminem em um outro vØrtice seletor (note que os caminhos devem passar apenas por dois vØrtices seletores: o de origem e o de destino). Chamemos cada um dos caminhos obtidos pelo mØtodo recØm descrito de "caminho de cobertura". Devido constru ªo de *G*0, cada caminho de cobertura visitarÆ todos os dispositivos que representam arestas de *E* incidentes no vØrtice de origem do caminho e entªo terminar em outro vØrtice seletor. Sendo assim, este vØrtice de origem (digamos *u*) cabe na equa ªo que descreve *V* \* e portanto *u* ∈ *V* \*. Cada dispositivo relacionado a *u* (qualquer *Wux,Wxu*, sendo *x* outro nodo de *G* incidente *u*) serÆ visitado por um ou dois caminhos de cobertura. Se um caminho de cobertura o visitar, entªo a aresta (*u,x*) ∈ *E* Ø coberta em *G* pelo vØrtice *u*. Se dois caminhos o visitarem, entªo esse outro caminho implica que *x* satisfaz a equa ªo acima e tambØm pertence *V* \*, e assim, a aresta (*u,x*) ∈ *E* Ø coberta nªo s por *u* mas tambØm por *x*. Pelo fato de que todos os vØrtices em dispositivos sejam visitados por algum caminho de cobertura, cada aresta em *E* Ø coberta por algum vØrtice em *V* \*. Logo, se *G*0 tem um ciclo hamiltoniano, *G* tem uma cobertura de vØrtices de tamanho *k*. Com isso conclu mos que o problema da cobertura de vØrtices pode ser reduzido com sucesso ao problema do ciclo hamiltoniano e o problema do ciclo hamiltoniano em grafos nªo orientados Ø pertencente classe de problemas NP-Dif cil.

# O problema do ciclo hamiltoniano Ø NPCompleto

TEOREMA: O problema do ciclo hamiltoniano em grafos nªo orientados pertence classe dos problemas NP Completos.

Demonstra ªo. Foi demonstrado na sessªo 3 deste artigo que o problema do ciclo hamiltoniano pertence classe NP. Na sessªo 5 do mesmo foi feita a demonstra ªo de que o problema do ciclo pertence classe NPCompleto. Sendo assim, por de ni ªo, o problema do ciclo hamiltoniano em grafos nªo orientados pertence classe dos problemas NP-Completos.

# ReferŒncias

1. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Cli ord Stein,

Introduction to Algorithms. The MIT Press, 3rd Edition, 2009

1. Laira Vieira Toscani, Paulo A. S. Veloso, Complexidade de Algoritmos. Bookman, 3a edi ªo, 2012
2. Michael R. Garey, David S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W.

H. Freeman & Co., 1979